



ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

*O abordare stocastică și numerică pentru
proces de ramificare-fragmentare*

Oana-Valeria STAMATE

REZUMAT

Domeniul fundamental: Matematică și științe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul
conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

București, 2020

Rezumat

Teza prezintă modele stocastice și numerice pentru evoluția în timp a unor fenomene din viața reală, utilizând procese de ramificare și fragmentare în timp continuu, cu aplicații la avalanșe. Considerăm de asemenea o problemă la limită neliniară asociată. Studiem procese de ramificare-fragmentare și ecuațiile diferențiale stocastice asociate pentru nuclee de fragmentare continue și discontinue, cu abordări numerice probabiliste, obținem o soluție numerică pentru problema Dirichlet neliniară asociată unui proces de ramificare discretă nelocală, într-un domeniu euclidian mărginit, investigăm procesele subordonate Rosenblatt în « al doilea haos » al lui Wiener, cu motivația aplicațiilor la conductivitatea hidraulică iar în final introducem o metodă geometrică de optimizare pentru funcționale neliniare care depind de domeniu, modelând fluxul declanșării avalanșelor dense, propunând și o abordare numerică.

Structura lucrării este următoarea.

Primul capitol dezvoltă procesele de ramificare-fragmentare, utilizând ecuații diferențiale stocastice de fragmentare, cu aplicații la avalanșe. Investigăm proprietățile de ramificare ale soluției unei ecuații de fragmentare pentru distribuții de mase și asociem un proces Markov în timp continuu cu traiectorii càdlàg, pe spațiul tuturor dimensiunilor de fragmentare introdus de J. Bertoin. Arătăm că un nucleu de fragmentare binară induce o clasă specială de nuclee de ramificare și luând ca proces de bază soluția ecuației inițiale de fragmentare pentru distribuții de mase, construim un proces de ramificare, corespunzător unei rate de pierdere de masă superioare unui prag strict pozitiv fixat d . Rezultă că acest proces de ramificare ia valori în mulțime tuturor configurațiilor finite de mărime mai mare ca d . Procesul pe spațiul tuturor dimensiunilor de fragmentare se obține lăsând d să tindă către zero. Un argument cheie în demonstrarea convergenței proceselor de ramificare este dat de Teorema Bochner-Kolmogorov. Construcția procesului și demonstrarea proprietăților de regularitate pentru traiectoriile acestuia, se bazează pe câteva instrumente noi de teoria potențialului, exprimate în termeni de funcții și măsuri excesive, funcții Lyapunov cu nivele compacte și mulțimi absorbante. Prezentăm apoi un model stocastic pentru faza de fragmentare a unei avalanșe, construind un proces de ramificare-fragmentare corespunzător, pe mulțimea tuturor dimensiunilor de fragmentare. Stabilim o proprietate de tip fractal pentru acest proces. Rezultatele sunt obținute combinând instrumente analitice și probabiliste de teoria potențialului.

În Capitolul al 2-lea dezvoltăm o metoda comună de construcție a proceselor de ramificare-fragmentare în timp continuu pe spațiul tuturor dimensiunilor de fragmentare, induse de nuclee de fragmentare fie continue, fie discontinue. Introducem o schemă de aproximare pentru acest proces care este o soluție slabă a ecuației stocastice diferențiale de fragmentare corespunzătoare. Un rezultat central este calculul distribuțiilor proceselor de ramificare care aproximează viitorul proces de

ramificare-fragmentare. Obținem în final rezultate numerice care confirmă proprietatea fractală demonstrată modelului nostru pentru avalanșe, dezvoltat în Secțiunea 1.2.

În Capitolul al 3-lea prezentăm o abordare numerică probabilistă pentru problema Dirichlet neliniară asociată unui proces de ramificare. Instrumentele importante utilizate sunt reprezentarea probabilistă a soluției cu procese de ramificare cu valori măsurii, tehnici specifice pentru soluții numerice pentru ecuații liniare cu derivate parțiale, care au fost introduse și dezvoltate de către Milstein și Tretyakov, precum și metode de tip Monte-Carlo.

Capitolul al 4-lea introduce mișcarea Rosenblatt-Laplace prin subordonarea unui proces Rosenblatt cu un proces Gamma independent, motivația fiind dată de câteva lucrări care modelează conductivitatea hidraulică. Studiem proprietățile de bază ale procesului stocastic nou obținut și facem o analiză numerică a acestuia. În particular, aproximăm numeric momentele, cumulanții pentru acest proces și propunem o metodă de simulare a traiectoriilor.

Capitolul al 5-lea tratează o nouă metodă numerică a variației frontierei domeniului pentru rezolvarea problemei lui Cheeger generalizată. Această problemă (numită și problema lui Cheeger cu pondere, care modelează alunecările de teren, avalanșele de zăpadă sau alte fluxuri de materiale geofizice) are ca scop aflarea "factorului de siguranță" și a domeniului de "colaps/ruptură" (regiunea declanșării fuxului). Problema este reformulată în spațiul funcțiilor cu variație mărginită și este rescrisă sub forma unei probleme de optimizare a domeniului care folosește numai funcții cu valori pe frontieră. Pentru această, calculăm derivata în raport cu domeniu a funcționalei Cheeger și formula divergenței pe suprafață pentru funcții definite pe suprafață. Pentru discretizarea spațială folosim doar discretizarea frontierei domeniului. Chiar dacă adesea alegerea formei inițiale în algoritm este dată printr-un algoritm genetic, metoda variației frontierei este foarte atractivă. În final, ilustrăm metoda propusă prin exemple numerice ale regiuniilor de declanșare a fuxului, pentru câteva probleme fizice importante (în dimensiunile doi și trei).

Capitolul 6 completează lucrarea cu posibile continuări în viitor ale acestor direcții de cercetare.

Toate lucrările de la Bibliografie sunt citate în text.